

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

11. lipnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **utorak, 12. lipnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(20 bodova.) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, uz $n \geq m$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\text{rang}(A) = m$, i neka je $b \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor.

- Napišite pripadnu matricnu formulaciju problema **najmanjih kvadrata**.
- Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava **normalnih jednadžbi** i njegovu geometrijsku interpretaciju.
- Ukratko komentirajte što se događa ako A **nema** puni rang po stupcima.
- Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** rješenja sustava normalnih jednadžbi.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

11. lipnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -11 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[0, 3]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 3]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

11. lipnja 2012.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{3x + 2}$$

na intervalu $[0, 2]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvorove x_1 , x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 (x+1) f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (x+1)^{-1/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\ln(x + 2) = \frac{7}{2} - 3 \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ

11. lipnja 2012.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **utorak, 12. lipnja 2012. u 11 sati.**

ZADATAK 1

1

(20 bodova.) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\text{rang}(G) = n$.

- Napišite “puni” i “skraćeni” oblik **QR faktorizacije** matrice G .
- Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti** QR faktorizacije matrice G .
- Ukratko komentirajte što se događa ako G **nema** puni rang po stupcima.
- Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** QR faktorizacije.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 2

11. lipnja 2012.

(15 bodova.) Zadan je linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ -17 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i R tako da je $PA = LR$. Iz ove faktorizacije izračunajte rješenje zadanog sustava.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 3

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Funkciju

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

interpoliramo polinomom p_3 stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži čvorova u intervalu $[0, 4]$.

- (a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik interpolacijskog polinoma p_3 .
- (b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na intervalu $[0, 4]$.
- (c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 4

11. lipnja 2012.

(15 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

na intervalu $[0, 3]$. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte i najveću apsolutnu pogrešku ove aproksimacije na zadanom intervalu.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 5

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvorove x_1 , x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 (2-x) f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (2-x)^{-1/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA — POPRAVNI KOLOKVIJ — ZADATAK 6

11. lipnja 2012.

(20 bodova.) Nađite najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$\ln(x + 3) = \frac{7}{2} - 3 \cos x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!